| Lycée de Métouia | Classe : $4^{ième}$ année Maths | Prof : Mme Jouaber Aouicha | |
|---|---|---|---|
| **Devoir de contrôle n°1** (Mathématiques) | | Date : 17 / 11 / 2009 | Durée : 2 heures |

**Exercice n°1 : (4 points)**

Soit f une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition, son tableau de variations est le suivant :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $7$ |

1) Donner dans chaque cas le nombre de solutions de l'équation :
   f(x) = 0 , f(x) = 10 , f(x) = 5 et f(x) = -1
2) Déterminer en justifiant les réponses les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x})$ , $\lim\limits_{x\to +\infty} f(\frac{1}{x})$ ; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(\frac{x+1}{3-x})$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(1-x^2)$

**Exercice n°2 : (5 points)**

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x+1-\sqrt{x^2-1} & si\ x>1 \\ f(x) = x^3+3x-2 & si\ x\leq 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f en (+∞) et (-∞)
2) Montrer que f est continue sur IR
3) a) montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans ] -1,1[
   b) vérifier que $0,5 < \alpha < 0,75$
   c) déterminer le signe de f(x) sur ] -1,1[

**Exercice n°3 : (4points)**

Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $[0\,,2\pi[$ ,on pose pour tout nombre complexe z

$f(z)=z^2-(i+e^{i\theta})z+(1+i)(-1+e^{i\theta})$

1) a) Vérifier que $f(1+i)=0$.
   b) en déduire les solutions z' et z'' de l'équation $f(z)=0$

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives (-1) , $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$
   a) montrer que lorsque $\theta$ varie dans $[0\,,2\pi[$, M varie sur un cercle $\zeta$ de centre A dont on précisera le rayon
   b) Déterminer les valeurs de $\theta$ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle $\zeta$

**Exercice n°4: (7 points)**

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et soit $\zeta$ son cercle circonscrit.

La médiatrice de [BC] recoupe $\zeta$ en E, la droite (BE) coupe (AC) en F

1) a) montrer que le triangle ABF est rectangle en B et que le point C est le milieu de [AF]
   b) montrer que la droite (EC) est la médiatrice de [AF]
2) on considère les isométries $f=S_{(AC)}oS_{(AB)}$ $et$ $g=S_{(BE)}oS_{(EC)}$
   a) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des isométries $f\ et\ g$
   b) déterminer et construire les droites $\Delta_1\ et\ \Delta_2$ telles que $f=S_{(AE)}oS_{\Delta_1}$ $et$ $g=S_{\Delta_2}oS_{(AE)}$
   c) montrer que $\Delta_1\ et\ \Delta_2$ sont parallèles puis identifier $gof$
3) soit $\Delta_3$ la parallèle à (AE) issue de B, vérifier que $S_{(BE)}oS_{(AB)}=S_{\Delta_3}oS_{(BC)}$
4) soit l'isométrie $\psi=S_{(AE)}oS_{(BE)}oS_{(AB)}$
   a) justifier que $\psi$ est un antidéplacement
   b) montrer que c'est une symétrie glissante et donner sa forme réduite